

EXERCICE : DÉRANGEMENTS

(Pantza)

- Exercice:

Soit n un entier strictement positif. On appelle dérangement du groupe symétrique S_n tout élément σ de S_n vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma(k) \neq k.$$

On désigne par d_n le nombre de dérangements de S_n . On pose par convention $d_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k d_k = n!$$

2. On considère la série entière f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Montrer que R , le rayon de convergence de cette série entière, est supérieur ou égal à 1.

3. Donner le développement en série entière de la fonction $e^x f(x)$ sur l'intervalle $] -1; 1[$. En déduire que

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

4. En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- Solution:

1) • si $m=0$: évident

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$:

$\forall k \in \llbracket 0; m \rrbracket$, on note I_k le nombre de permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant exactement k éléments non invariants.

Pour avoir une telle permutation, on doit choisir k éléments non invariants parmi m entiers. Il y a $\binom{m}{k}$ choix possibles.

On construit ensuite un dérangement restreint à ces k éléments, il y a d_k possibilités.

Donc $\forall k \in \{0, \dots, m\}$, $I_k = \binom{m}{k} d_k$

Le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ est $m! = \text{Card}(S_m)$
 D'où $\text{Card}(S_m) = \sum_{k=0}^m I_k$, d'où $m! = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} d_k$

2) Pour tout m entier strictement positif, on a $d_k \leq m!$

donc: $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{d_m}{m!} \leq 1$

La suite $(\frac{d_m}{m!})_{m \in \mathbb{N}}$ est donc bornée, donc le rayon de convergence
 de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1:

$$\underline{R \geq 1}$$

3) On a: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (série exponentielle)

Les deux séries $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ ont un rayon de convergence
 supérieur ou égal à 1

donc leur série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ a un rayon de convergence
 supérieur ou égal à 1

$$\begin{aligned} \text{d: } \forall m \in \mathbb{N}, c_n &= \sum_{k=0}^m \frac{d_k}{k!} \cdot \frac{1}{(m-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{d_k}{k!} \cdot \frac{1}{(m-k)!} \cdot \frac{n!}{n!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} d_k \\ &= \frac{1}{n!} \cdot n! \quad (\text{question 1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc par la proposition (15):

$$\forall x \in]-1; 1[, e^x f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (\text{série géométrique})$$

$$\text{d'où: } \forall x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4) Toujours par la proposition, on a:

$$\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on a: $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{d_m}{m!} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!}$

THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS

(66 leçons)

- Exercice 1: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

Montrer que toute racine de P' est un barycentre à coefficients positifs de P .

Ex: $P = X^3 - iX - X + 1$. Représenter dans le plan complexe l'enveloppe convexe des racines de P et vérifier le résultat de la question précédente.

- Solution 1: Soient $a_1, \dots, a_n$ les racines distinctes deux à deux de P , et λ le coefficient dominant de P .

Soient $m_1, \dots, m_n$ les ordres de multiplicité respectifs de ces racines.

On a alors comme décomposition de P en facteurs irréductibles.

$$P(z) = \lambda \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{m_i}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } P'(z) &= \lambda \sum_{i=1}^n \left((z - a_i)^{m_i} \right)' \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z - a_k)^{m_k} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n m_i (z - a_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z - a_k)^{m_k} \end{aligned}$$

. Si $P(z) \neq 0$ on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{\lambda \sum_{i=1}^n m_i (z - a_i)^{m_i-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z - a_k)^{m_k}}{\lambda \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{m_i}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - a_i} \end{aligned}$$

et si $P'(z) = 0$, alors on a : $\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - a_i} = 0$

$$\text{et donc : } \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z - a_i} \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}_i}{z - a_i} \right) = 0$$

$$\text{i.e. } \sum_{i=1}^n m_i \frac{\bar{z} - \bar{a}_i}{|z - a_i|^2} = 0$$

$$d'où \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2} \right) \bar{z} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2} \right) \bar{a_i}$$

$$d'où \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2} \right) z = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2} \right) a_i$$

$$d'où \quad z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|z-a_i|^2} \right) a_i$$

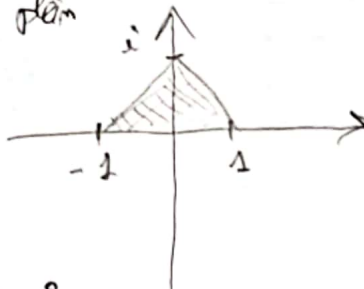
et z est barycentre à coefficients positifs de $\{a_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$

2) On a i racines de P , donc:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - iX^2 - X + i & X - i \\ \hline -(X^3 - iX^2) & X^2 - 1 \\ \hline 0 & -X + i \end{array}$$

$$\text{ainsi } X^3 - iX^2 - X + i = (X - i)(X^2 - 1) \\ = (X - i)(X - 1)(X + 1)$$

L'enveloppe convexe des racines de P est représentée dans le plan complexe par le triangle de sommets $-1, 1$ et i



$$\text{On a } P'(z) = 3X^2 - 2iX + 1$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 3 \times 1 \\ = -4 - 12 \\ = -16 \\ = -(4i)^2$$

$$\text{donc } z_1 = \frac{+2i - 4i}{6} = -\frac{i}{3} \\ z_2 = \frac{+2i + 4i}{6} = i$$

et $H(i)$ et $H(-\frac{i}{3})$ sont dans le triangle, bien.

PROBLÈME DES CHAPEAUX

(31 leçon & probas stats)

- Exercice:

1) Formulation du problème:

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ et soient $A_1, \dots, A_m$ des parties d'un ensemble fini.

On pose $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$

Démontrer que: $\text{Card}(A) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

Donner
un
ex
ap
et
séparé.

2) À l'entrée d'une réception, m invités laissent leurs chapeaux au vestiaire.

À la fin de la réception, les m chapeaux sont redistribués au hasard.

Calculer la probabilité p_m qu'au moins un invité récupère son propre chapeau et déterminer sa limite L lorsque m tend vers l'infini.

b) Déterminer un entier m_0 tel que $|p_m - L| < 10^{-2}$

- Solution: 1) on la démontre par récurrence.

Soit l'affirmation $P_m: \forall A_1, \dots, A_m$ parties d'un ensemble fini,

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

• si $m=1$: évident

• si $m=2$: on a: $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$

(union disjointe)

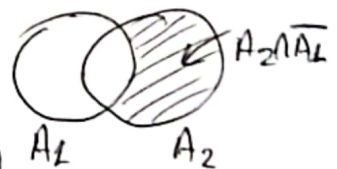
donc $\text{Card}(A_1 \cup A_2) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2 \cap \bar{A}_1)$

Mais $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$ (union disjointe)

donc $\text{Card}(A_2) = \text{Card}(A_2 \cap A_1) + \text{Card}(A_2 \cap \bar{A}_1)$

d'où $\text{Card}(A_1 \cup A_2) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) - \text{Card}(A_2 \cap A_1)$

et la propriété advenue.



• Supposons que P_m est vraie pour $m \in \mathbb{N}^*$.

On a: $\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cup \left(A_{m+1} \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)} \right)$ (union disjointe)

d'où $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + \text{Card}\left(A_{m+1} \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)}\right)$

mais $A_{m+1} = \left(A_{m+1} \cap \overline{\left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)} \right) \cup \left(A_{m+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \right)$

d'où $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + \text{Card}(A_{m+1}) - \text{Card}\left(A_{m+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)\right)$

et $\text{Card}\left(A_{m+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m (A_i \cap A_{m+1})\right)$

$= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{m+1})$ (hyp. de récurrence)

d'où $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + \text{Card}(A_{m+1}) - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{m+1})$

$\text{Card } A_1 + \text{Card } A_2 + \dots + \text{Card } A_m$
 $- (\text{Card}(A_1 \cap A_2) + \dots + \text{Card}(A_1 \cap A_m + \dots + \text{Card}(A_{m-1} \cap A_m))$
 $+ \text{Card}(A_{m+1})$
 $- \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{m+1})$
 $= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m+1} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

donc la propriété est vraie au rang $m+1$
 donc la propriété P_m est vraie $\forall m \in \mathbb{N}^*$

2/a) On prend comme univers le groupe symétrique S_m (associé à une distribution au hasard de m chapeaux.)

Soit $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket$: $A_k = \{\sigma \in S_m / \sigma(k) = k\}$ et $A = \bigcup_{k=1}^m A_k$ (union disjointe!)

A_k correspond à l'événement: " k n'a rien invité récupère son chapeau"
 et A correspond à l'événement: "au moins un des invités récupère son chapeau"

b) on a: $|p_m - 1| < 10^{-2} \Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right| < 10^{-2} \Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < 10^{-2}$

et $\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{(m+1)!}$ par le théorème spécial des séries alternées
 donc il suffit que $\frac{1}{(m+1)!} < 10^{-2}$ pour avoir $|p_m - 1| < 10^{-2}$

Par la formule du Crible on a:

$$\text{Card}(A) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

$\text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ est égal au nombre de permutations qui fixent au moins les k entiers $i_1, \dots, i_k$.

Donc $\text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (m-k)!$ (nombre de permutations des $m-k$ entiers restants/)

et on a $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} 1 = \binom{m}{k}$ (nombre de combinaisons de k nombres choisis parmi m)

$$\begin{aligned} \text{d'où } \text{Card}(A) &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)! \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{m!}{k!(m-k)!} (m-k)! \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{m!}{k!} \end{aligned}$$

Si p_m est la probabilité qu'au moins un invité récupère son chapeau alors:

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{m!}{k!}}{m!} \\ &= - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1+1} \frac{1}{k!} = - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} - (-1) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} p_m &= 1 - \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-1} \\ &(\approx 0,6321) \end{aligned}$$

b)

PROPRIÉTÉS AVEC POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES

(Moria H&E, M&SI // 41 thèmes)

- Exercice 1: Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

- 1) Si A est inversible, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- 2) a) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
 b) En déduire que pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$
 on a: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
- 3) Montrer que $\chi_{eAB} = \chi_{eBA}$

- Solution: 1) Si A est inversible on a:

$$AB = ABAA^{-1} \\ = A(BA)A^{-1}$$

Donc les matrices AB et ABA sont semblables,
 elles ont donc même polynôme caractéristique.
 Donc: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

2) a) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M admet au plus n valeurs propres.
 Donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \lambda$ val. prop: $0 < |\lambda| < \varepsilon$ on a
 $M - \lambda \text{Id}$ inversible

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite tq: $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < |\lambda_k| < \varepsilon$
 et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = 0$

La suite $(M - \lambda_k \text{Id})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices
 inversibles convergeant vers M .

Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est bien dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

b) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{C})$
 telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$

alors par la question 1): $\forall k \in \mathbb{N}, \chi_{A_k B} = \chi_{B A_k}$

l'application déterminant étant continue, on obtient
 donc à la limite: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

3) Les matrices AB et BA de $M_n(\mathbb{C})$ sont triangulaires
 Il existe donc $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T, U \in T_{n,s}(\mathbb{C})$
 tels que: $AB = PTP^{-1}$ et $BA = QUQ^{-1}$

Par la question 2), on a: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

donc on peut supposer que T et U ont la même
 diagonale:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

On a alors: $e^{AB} = e^{PTP^{-1}} = P e^T P^{-1}$
 et: $e^{BA} = e^{QUQ^{-1}} = Q e^U Q^{-1}$

d'où $\chi_{e^{AB}} = \chi_{e^T}$ et $\chi_{e^{BA}} = \chi_{e^U}$

avec $e^T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * \\ & \ddots \\ 0 & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$ et $e^U = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * \\ & \ddots \\ 0 & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

d'où $\chi_{e^{AB}} = \chi_{e^{BA}}$

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, NILPOTENCE,
DETERMINANT, TRIGONALISATION, DIAGONALISATION
(Matière: MCA MPSI)

- Exercice: 4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

a) Montrer que $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$

b) En déduire que: $\det(A\bar{A} + I_n) \in \mathbb{R}$

et Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que: A est diagonalisable
ssi A^2 est diagonalisable

3) Soient $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, tel
que $AN = NA$.

Montrer que: $\det(A+N) = \det(A)$

- Solution 1) On a: $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \chi_{A\bar{A}}(\lambda) = \det(A\bar{A} - \lambda I_n)$
 $= \det(\overline{A\bar{A} - \lambda I_n})$
 $= \det(\bar{A}\bar{A} - \bar{\lambda} I_n)$
 $= \chi_{\bar{A}\bar{A}}(\bar{\lambda})$
 $= \chi_{A\bar{A}}(\bar{\lambda}) \text{ (car } \chi_{AB} = \chi_{BA})$

donc $\chi_{A\bar{A}}$ est à coefficients réels,
i.e. $\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$

b) On en déduit: $\det(A\bar{A} + I_n) = \chi_{A\bar{A}}(-1) \in \mathbb{R}$

et si A diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
d'où $A^2 = PD^2P^{-1}$ est diagonalisable
car $D^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

• si A^2 diagonalisable.

alors $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples
tel que $P(A^2) = 0$ (avec P normalisé)

- si $X \nmid P$, alors $\exists R \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$
tels $P = X^R Q$ et $Q(0) \neq 0$

$$\text{d'où } A^{2k} Q(A^2) = 0$$

et comme A inversible alors $Q(A^2) = 0$

- si $X \nmid P$, i.e. $P(0) \neq 0$

alors P scinde à racines simples non multiples de X

donc $\exists N \in \mathbb{N}^* \exists z_1 \dots z_N \in \mathbb{C}^* \text{ (2 à 2 distincts)}$

$$\text{tg: } P = \prod_{k=1}^N (X - z_k)$$

$$\text{d'où } \prod_{k=1}^N (A^2 - z_k I_n) = P(A^2) = 0$$

si $\forall k \in \{1, \dots, N\}$ z_k est une racine carrée complexe de z_k , alors:

$$R = \prod_{k=1}^N ((X - z_k)(X + z_k)) \text{ scinde à simple}$$

et annulateur de A ,

$$\text{donc } R(A) = P(A^2) = 0$$

donc A est diagonalisable.

$$3). \text{ Comme } AN = NA, \text{ alors } A^{-1}(ANA)^{-1} = A^{-1}(NA)A^{-1}$$

donc $NA^{-1} = A^{-1}N$ et A^{-1} et N commutent

N nilpotente, donc $\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tg } N^k = 0$

$$\text{et } (A^{-1}N)^k = (A^{-1})^k N^k = 0 \text{ donc } A^{-1}N \text{ nilpotente}$$

$A^{-1}N$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et nilpotente

donc sa seule valeur propre est 0, et $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

$$\text{tel que: } A^{-1}N = PTP^{-1}$$

$$\text{et } T \in T_{n,s}(\mathbb{C})$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \det(A+N) = \det(A(I_n + A^{-1}N))$$

$$= \det(A) \det(I_n + A^{-1}N)$$

$$= \det(A) \det(I_n + PTP^{-1})$$

$$= \det(A) \det(P(I_n + T)P^{-1})$$

$$= \det(A) \det(P) \det(I_n + T) \det(P^{-1})$$

$$= \det(A) \det(I_n + T)$$

$$= \det(A)$$

$$\text{avec } T_{n+1} + T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

THEOREME CHINOIS

(BURG; Linet)

- Exercice: Soient p et q deux entiers mutuellement premiers.
1) si p et q sont premiers entre eux, démontrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$
et montrer que le groupe produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

- Solution: 1) Soit p et q premiers entre eux.
Soit l'application $\pi: \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$
définie par: $\pi(\bar{x}_{pq}) = (\bar{x}_p; \bar{x}_q)$
(où $\bar{x}_{pq}$ est la classe de x de $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, etc.)
• on a: si x et y entiers tels que $\bar{x}_{pq} = \bar{y}_{pq}$
alors $pq \mid x - y$, d'où $p \mid x - y$ et $q \mid x - y$
d'où $\bar{x}_p = \bar{y}_p$ et $\bar{x}_q = \bar{y}_q$
i.e. $\pi(\bar{x}_{pq}) = \pi(\bar{y}_{pq})$
et π est donc bien définie.

• Montrer que π est un morphisme d'anneaux.
Soient x et y deux entiers, alors on a:

$$\begin{aligned}\pi(\overline{x+y}_{pq}) &= (\overline{x+y}_p; \overline{x+y}_q) \\ &= (\overline{x_p + y_p}; \overline{x_q + y_q}) \\ &= (\overline{x_p}; \overline{x_q}) + (\overline{y_p}; \overline{y_q}) \\ &= \pi(\bar{x}_{pq}) + \pi(\bar{y}_{pq})\end{aligned}$$

$$\text{et de même: } \pi(\bar{x}_{pq}) = \pi(\bar{x}_{pq})\pi(\bar{y}_{pq})$$

$$\text{et: } \pi(\bar{1}_{pq}) = (\bar{1}_p; \bar{1}_q)$$

Donc π est un morphisme d'anneaux.

Montrons que π est un isomorphisme:

$$\text{Si } x \in \ker \pi, \text{ alors } \pi(\bar{x}_{pq}) = (\bar{0}_p; \bar{0}_q)$$

$$\text{d'où } p|x \text{ et } q|x \text{ et } x \in p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}$$

$$\text{Comme } p \wedge q = 1, \text{ alors } \text{ppcm}(p; q) = pq$$

$$\text{et donc } x \in pq\mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } \bar{x}_{pq} = \bar{0}_{pq}$$

donc π est injective

$$\text{Comme } \text{Card}(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}) = pq \text{ et } \text{Card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \text{Card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \text{Card}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = pq$$

donc π est injective entre deux ensembles de même cardinal,
donc π est bijective.

Et π est donc un isomorphisme d'anneaux.

$$\text{d'où } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$$

$$2. \text{ Si } p \wedge q = 1, \text{ alors } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \text{ (petit th. de Chine)} \\ \text{donc cyclique}$$

$$\text{Si } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux, alors } m = \text{ppcm}(p; q) < pq$$

$$\text{d'où } \forall (\bar{x}; \bar{y}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \text{ on a:}$$

$$m(\bar{x}; \bar{y}) = (\bar{m}x; \bar{m}y) = (\bar{0}; \bar{0}) \text{ car } p|m \text{ et } q|m$$

donc tout élément du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est
d'ordre un diviseur de m .

donc il n'y a pas d'éléments d'ordre pq dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$
le groupe n'est donc pas cyclique

Lemme de Gauss & Critère Eisenstein (Gourdon Algèbre)

EXERCICE 4 (LEMME DE GAUSS ET CRITÈRE D'EISENSTEIN). 1/ a) Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier. On suppose que p divise tous les coefficients du produit PQ . Montrer que p divise tous les coefficients de P ou tous les coefficients de Q .

b) (Lemme de Gauss). Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $c(P)$ le pgcd des coefficients de P (et $c(P) = 1$ si $P = 0$). Montrer que si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

2/ Montrer que si $\Phi \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3/ a) (Critère d'Eisenstein). Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que

$$(i) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1, p \mid a_k \quad (ii) \quad p \nmid a_n \quad (iii) \quad p^2 \nmid a_0.$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

b) Application. Soit p un nombre premier et $\Phi(X) = X^{p-1} + \dots + X + 1$. Montrer que Φ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Solutions :

- Solution :

1/ a) Soit $a \in \mathbb{Z}$, on note $\bar{a}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si p divise tous les coefficients de $PQ = c_m X^m + \dots + c_0 \in \mathbb{Z}[X]$

$$\text{alors } \overline{PQ} = \overline{c_m} X^m + \overline{c_{m-1}} X^{m-1} + \dots + \overline{c_0} = \overline{0}$$

$$\text{or } \overline{PQ} = \overline{P} \cdot \overline{Q} \text{ donc } \overline{P} \cdot \overline{Q} = \overline{0}$$

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est intègre

d'où $\overline{P} = \overline{0}$ ou $\overline{Q} = \overline{0}$.

et si $\overline{P} = \overline{0}$, alors ses coefficients sont tous divisibles par p .

b) Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Alors $P_1 = \frac{P}{c(P)}$ et $Q_1 = \frac{Q}{c(Q)}$ appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$.

$$\text{et } c(P_1) = c(Q_1) = 1$$

Supposons $c(P_1 Q_1) > 1$, alors il existe un nombre premier p divisant $c(P_1 Q_1)$. Mais alors, par la question 1a), $p \mid c(P_1)$ ou $p \mid c(Q_1)$

c'est absurde!

$$\text{Donc } c(P_1 Q_1) = 1$$

$$\& \quad c(PQ) = c(c(P)P_1 c(Q)Q_1) = c(P)c(Q)c(P_1 Q_1) = c(P)c(Q)$$

2) Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels $\phi = PQ$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels $P_1 = \alpha P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q_1 = \beta Q \in \mathbb{Z}[X]$

On a donc: $P_1 Q_1 = \alpha \beta PQ = \alpha \beta \phi$

d'où $c(P_1)c(Q_1) = \alpha \beta c(\phi)$ par le lemme de Gauss

Posons maintenant $P_2 = \frac{P_1}{c(P_1)}$ et $Q_2 = \frac{Q_1}{c(Q_1)}$

$$\begin{aligned} \text{alors } P_2 \text{ et } Q_2 \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } \alpha \beta \phi &= c(P_1)P_2 c(Q_1)Q_2 \\ &= c(P_1)c(Q_1)P_2 Q_2 \\ &= \alpha \beta c(\phi)P_2 Q_2 \end{aligned}$$

Si $P_3 = c(\phi)P_2$, alors $\phi = P_3 Q_2$ avec $P_3, Q_2 \in \mathbb{Z}[X]$

mais ϕ étant irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ on a:

$$\deg(P_3) = 0 \text{ ou } \deg(Q_2) = 0$$

$$\text{d'où } \deg(P) = 0 \text{ ou } \deg(Q) = 0$$

et donc ϕ est bien irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3)a) si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors par la question 2) P est réductible

dans $\mathbb{Z}[X]$, donc $\exists Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ (q $P = QR$)

On pose alors $a = \deg(Q) \geq 1$ et $b = \deg(R) \geq 1$

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ on a: $\overline{P} = \overline{Q}\overline{R}$, d'où $\overline{a_m} X^m = \overline{Q}\overline{R}$

$$\text{d'où } \overline{Q} = \overline{q_a} X^a \text{ et } \overline{R} = \overline{r_b} X^b$$

on en déduit que $\overline{q_0} = \overline{r_0} = \overline{0}$ et $p \mid q_0$ et $p \mid r_0$

d'où $p^2 \mid q_0 r_0 = a_0$, impossible par hypothèse! Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

b) On a: $(X-1)\phi(X) = (X-1)(X^{p-1} + \dots + X + 1) = X^p - 1$

$$\text{donc } X\phi(X+1) = (X+1)^p - 1, \text{ d'où } \phi(X+1) = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^{k-1}$$

et si p premier, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, p-1 \nmid k$ on a: $p \nmid \binom{p}{k}$, donc $\phi(X+1)$ satisfait le critère d'irréductibilité, donc $\phi(X+1)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Nombres parfaits (Cours particuliers)

Si $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{D}(n) = \{d \in \mathbb{N}^* | d|n\}$ et $\sigma(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}(n)} d$ et on dit que n est un nombre parfait si $\sigma(n) = 2n$. Ainsi 6 et 28 sont parfaits.

Dans toute la suite n est un entier naturel non nul.

a) Montrer que $n \in \mathcal{P} \iff \sigma(n) = n + 1$.

b) Montrer que, si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $\Phi : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) \rightarrow \mathcal{D}(ab)$, $(m, n) \mapsto mn$ définit une application bijective. En déduire $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

c) Si $a \in \mathbb{N}^*$ et $2^a - 1 \in \mathcal{P}$. Montrer que $2^{a-1}(2^a - 1)$ est un nombre parfait.

d) On suppose n parfait et on écrit $n = 2^a b$ où b est un entier impair.

i. Montrer $2^{a+1}b = \sigma(b)(2^{a+1} - 1)$ et en déduire que $(2^{a+1} - 1) | b$.

ii. On pose $b = (2^{a+1} - 1)c$. En considérant $\sigma(b)$ montrer que b est premier.

Solutions :

a) Soit $n \in \mathcal{P}$. On a alors $\mathcal{D}(n) = \{1, n\}$. Donc $\sigma(n) = 1 + n$
 • Si n n'est pas premier et $n > 1$, on a : $\{1, n\} \subsetneq \mathcal{D}(n)$, donc $\sigma(n) > n + 1$
 Soit $n = 1$, alors $\sigma(1) = 1$ et donc $\sigma(1) < 1 + 1$
 d'où : $n \in \mathcal{P} \iff \sigma(n) = n + 1$

b) Soient $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et $b = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$ la décomposition en facteurs premiers de a et b , où $\forall i \in \mathbb{N}$, α_i et $\beta_i \in \mathbb{N}^*$

On a $\{p_1, \dots, p_k\} \cap \{q_1, \dots, q_m\} = \emptyset$ car $a \wedge b = 1$

On sait que : $\mathcal{D}(a) = \{p_1^{\lambda_1} \dots p_k^{\lambda_k} / \lambda_i \in [0, \alpha_i] \forall i \in [1, k]\}$

$\mathcal{D}(b) = \{q_1^{\mu_1} \dots q_m^{\mu_m} / \mu_i \in [0, \beta_i] \forall i \in [1, m]\}$

donc $\mathcal{D}(ab) = \{p_1^{\lambda_1} \dots p_k^{\lambda_k} q_1^{\mu_1} \dots q_m^{\mu_m} / \lambda_i \in [0, \alpha_i] \forall i \in [1, k] \text{ et } \mu_i \in [0, \beta_i] \forall i \in [1, m]\}$
 $= \{dd' / (d, d') \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)\}$

on en déduit que Φ est bien une application bijective.

Par la bijectivité de Φ on a donc :

$$\begin{aligned} \sigma(ab) &= \sum_{(d, d') \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)} dd' \\ &= \left(\sum_{d \in \mathcal{D}(a)} d \right) \left(\sum_{d' \in \mathcal{D}(b)} d' \right) \end{aligned}$$

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

c) On a : 2^{a-1} et $2^a - 1$ premiers entre eux car :

$$2 \times 2^{a-1} - 1 \times (2^a - 1) = 2^a - 2^a + 1 = 1$$

(relation de Bézout)

Donc par la question précédente :

$$\sigma(2^{a-1}(2^a - 1)) = \sigma(2^{a-1})\sigma(2^a - 1)$$

et comme $2^a - 1 \in \mathbb{P}$, on a $\sigma(2^a - 1) = 2^a - 1 + 1$ (question a))

$$\text{d'où } \sigma(2^{a-1}(2^a - 1)) = 2^a \sigma(2^{a-1})$$

$$\text{Maintenant, } \mathcal{D}(2^{a-1}) = \{1, 2, \dots, 2^{a-1}\}$$

$$\text{donc } \sigma(2^{a-1}) = 1 + 2 + \dots + 2^{a-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{a-1} 2^k$$

$$= \frac{2^a - 1}{2 - 1} \quad (\text{somme d'une suite géométrique})$$

$$= 2^a - 1 \quad (*)$$

$$\text{d'où } \sigma(2^{a-1}(2^a - 1)) = 2^a \times (2^a - 1)$$

$$= 2 \times (2^{a-1}(2^a - 1))$$

donc $2^{a-1}(2^a - 1)$ est un nombre parfait

d) Soit n parfait et $n = 2^a b$ où b entier impair.

i) $2^a \wedge b = 1$ donc $\sigma(n) = \sigma(2^a)\sigma(b)$ (question b))

$$= (2^{a+1} - 1)\sigma(b) \quad \text{par } (*)$$

$$n \text{ étant parfait on a alors : } \sigma(n) = 2n = 2 \times 2^a b = 2^{a+1} b$$

$$\text{d'où } \frac{2^{a+1} b}{2^{a+1} - 1} = \sigma(b)$$

Comme $2^{a+1} \wedge (2^{a+1} - 1) = 1$, on a par le lemme de Gauss : $\frac{2^{a+1} - 1}{2^{a+1}} \mid b$

ii) Soit $b = (2^{a+1} - 1)c$ où c entier (car $2^{a+1} - 1 \mid b$)

$$\text{et } \sigma(b) \mid (2^{a+1} - 1) = 2^{a+1} b = 2^{a+1} (2^{a+1} - 1)c$$

$$\text{d'où } \sigma(b) = 2^{a+1} c$$

Supposons que $c > 1$. Alors on a 1, c et b diviseurs distincts de b ,

$$\text{donc } \sigma(b) \geq 1 + c + b$$

$$\geq 1 + c + (2^{a+1} - 1)c$$

$$\geq 1 + 2^{a+1} c$$

$$\sigma(b) \geq 1 + \sigma(b) \quad \text{: impossible!}$$

$$\text{Donc } c = 1 \text{ et } b = 2^{a+1} - 1 \text{ et } \sigma(b) = 2^{a+1} = 2^{a+1} - 1 + 1$$

d'où b est un nombre premier.

Résolution système différentiel (31 leçons)

Exemple. Résolvons le système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où t est la variable et x, y, z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Solutions :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

alors on a : $(S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$

• On redécrit A :

- le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 2 & 1-X & -2 \\ 2 & 2 & -3-X \end{vmatrix}$

$\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 2 & -2 \\ 1-X & 1-X & -2 \\ 1-X & 2 & -3-X \end{vmatrix}$

$= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1-X & -2 \\ 1 & 2 & -3-X \end{vmatrix}$

$\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix}$

$= (1-X)(-1-X)^2$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1\}$

- Soit $E_1 = \text{Ker}(A - I_3) : V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow AV = V$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = x \\ 2x + y - 2z = y \\ 2x + 2y - 3z = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2z \\ 2x = 2z \\ 2x = 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow V \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

posons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Soit $E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) : V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow AV = -V$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = -x \\ 2x + y - 2z = -y \\ 2x + 2y - 3z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + y - z = 0$$

on peut prendre comme base de $E_{-1} : \left\{ \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- on a E_1 de dimension 1 et E_{-1} de dimension 2, donc A est diagonalisable

- On a donc : $D = P^{-1}AP$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Inverse.

- On veut résoudre $AX(t) = X'(t)$

i.e. $PDP^{-1}X(t) = X'(t)$

i.e. $DP^{-1}X(t) = P^{-1}X'(t)$

Comme P^{-1} est une matrice constante, on a : $(P^{-1}X(t))' = P^{-1}X'(t)$

donc il suffit de résoudre $(s) : DU(t) = U'(t)$ où $U(t) = P^{-1}X(t)$

et : so $U(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ on a : $(s) \Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = a(t) \\ -b'(t) = b(t) \\ -c'(t) = c(t) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a(t) = \alpha e^t \\ b(t) = \beta e^{-t} \\ c(t) = \gamma e^{-t} \end{cases}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

d'où $X(t) = PU(t)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{-t} \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^t + e^{-t}(-\beta + \gamma) \\ \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{-t} \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Déterminant de Vandermonde.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

On considère de déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Soit $P(X) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$.

Déterminer $P(a_n)$ en fonction de $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.

2. En déduire $V(a_1, \dots, a_n)$.

Solutions : Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

* S'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$ alors $V(a_1, \dots, a_m) = 0$

* Supposons donc que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ on ait $a_i \neq a_j$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = V(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, X)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{m-1} \end{vmatrix}$$

alors $\deg(P) \leq m-1$

de plus, le coefficient de X^{m-1} est $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{m-1} & \dots & a_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix} = V(a_1, \dots, a_{m-1})$
(par développement du déterminant)

Comme : $\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $P(a_i) = 0$ (2 lignes identiques)

alors $a_1, \dots, a_{m-1}$ sont racines de P 2 à 2 distinctes

comme $\deg(P) \leq m-1$, on en déduit que :

$$P(X) = V(a_1, \dots, a_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} (X - a_i)$$

$$\text{et donc } \underline{P(a_m) = V(a_1, \dots, a_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} (a_m - a_i)}$$

2) On va démontrer que la propriété $H_m : "V(a_1, \dots, a_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)"$ est vraie par récurrence.

• si $m=2$: $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$

donc H_2 est vraie.

• si pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, H_{n-1} est vraie, alors on a:

$$P(a_m) = V(a_1, \dots, a_m)$$

$$= V(a_1, \dots, a_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} (a_m - a_i) \quad (\text{par la question 1/})$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq m-1} (a_j - a_i) \prod_{i=1}^{m-1} (a_m - a_i) \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq m} (a_j - a_i)$$

donc H_m est vraie.

et par récurrence on a donc montré que:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2 : V(a_1, \dots, a_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m}^m (a_j - a_i)$$

Ex2 Probabilités & Stats

Ex21

- Exercice: Matrices stochastiques

Une particule se déplace sur les 3 sommets d'un triangle ABC ainsi:

- à chaque seconde: si elle est en A, elle y reste avec une proba de 0,25
elle va en B avec une proba de 0,5
elle va en C avec une proba de 0,25
- si elle est en B, elle va en A avec une proba de 0,5
elle va en C avec une proba de 0,5
- si elle est en C, elle va toujours en B.

On suppose qu'au départ elle est en A.

Notons A_m l'événement "la particule est en A à l'instant m "
et $a_m = P(A_m)$ (de même pour B_m, C_m, b_m et c_m) et $X_m = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix}$

1) À l'aide de la formule de probabilités totales, déterminer $A \in M_3(\mathbb{R})$
t.q. $\forall m \in \mathbb{N}: X_{m+1} = A X_m$

2) A est appelée matrice stochastique. Quelle remarque peut-on faire sur les coefficients?

3) Montrer que 1 est valeur propre de A et en déduire son spectre.

4) Diagonaliser A et déterminer X_{60} .

- Solution:

1) A_m, B_m et C_m forment un système complet d'événements, donc:

$$\begin{aligned} P(A_{m+1}) &= P_{A_m}(A_{m+1})P(A_m) + P_{B_m}(A_{m+1})P(B_m) + P_{C_m}(A_{m+1})P(C_m) \\ &= 0,25 \cdot P(A_m) + 0,5 \cdot P(B_m) + 0 \cdot P(C_m) \\ &= 0,25 \cdot P(A_m) + 0,5 \cdot P(B_m) \end{aligned}$$

on trouve en faisant de même pour $P(B_{m+1})$ et $P(C_{m+1})$:

$$\begin{pmatrix} a_{m+1} \\ b_{m+1} \\ c_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{pmatrix}$$

$$X_{m+1} = A \cdot X_m$$

2) Les coefficients de A sont dans $[0, 1]$ et la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.

3) On a A et tA ont le même spectre.

Par la remarque précédente on a: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de tA , et donc de A , associé à la valeur propre 1.

$$\text{On a: } \det A = \begin{vmatrix} 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{et } \text{tr } A = 0,25 + 0 + 0 = 0,25$$

donc si λ et μ sont les 2 autres valeurs propres de A (car matrice 3×3)

$$\text{on a: } \begin{cases} \lambda \cdot \mu \cdot 1 = 0 \\ \lambda + \mu = 0,25 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -0,75 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = -0,75 \end{cases}$$

donc le Spectre de A est: $\{-0,75; 0, 1\}$

4) A est diagonalisable car elle possède 3 v.p. distinctes.

On cherche les s.e. propres.

$$\bullet AX = -0,75X \text{ ssc } \begin{cases} 0,25x + 0,5y = -0,75x \\ 0,5x + z = -0,75y \\ 0,25x + 0,25y = -0,75z \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} y = \frac{-x}{0,5} = -2x \\ z = -0,75x(-2x) + 0,5x = 2x \end{cases}$$

$$\text{donc } E_{-0,75} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bullet AX = 0X \text{ ssc } \begin{cases} 0,25x + 0,5y = 0 \\ 0,5x + z = 0 \\ 0,25x + 0,25y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} y = \frac{-0,25x}{0,5} = -\frac{x}{2} \\ z = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bullet AX=X \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} 0,25x + 0,5y = x \\ 0,5x + z = y \\ 0,25x + 0,25y = z \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} y = \frac{0,75x}{0,5} = 1,5x \\ z = \frac{0,75}{0,5}x - 0,5x = x \end{cases}$$

$$\text{donc } E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{En posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ma: } A = PDP^{-1}$$

$$\text{d'où } X_{60} = PD^{60}P^{-1}X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On cherche } P^{-1}: \det P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 7 = 21$$

$$\text{d'où } P^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 8 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 7 & 0 & -7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } X_{60} = \frac{1}{21} PD^{60} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} P \begin{pmatrix} (-0,75)^{60} \\ 0 \\ \frac{1 \cdot 3}{=7} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} (-0,75)^{60} + 2 \times 3 \\ -2 \times (-0,75)^{60} + 3 \times 3 \\ (-0,75)^{60} + 2 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} (-0,75)^{60} + 6 \\ -2 \times (-0,75)^{60} + 9 \\ (-0,75)^{60} + 6 \end{pmatrix}$$

MÉTHODE DE NEWTON

(Kieffer)

- Tantôt: Résolution de l'équation $F(x)=0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ avec F fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

- on prend $x_0 \in I$
La tangente au graphe de F au point $(x_0, F(x_0))$ a alors pour équation:
$$y = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Si $F(x_0) \neq 0$, alors cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1 où:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{0 - F(x_0)}{F'(x_0)} + x_0 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

- La tangente au graphe de F au point $(x_1, F(x_1))$ coupe alors l'axe des abscisses en x_2 où:
$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

etc.

- On construit ainsi une suite (au moins) tq:
$$\begin{cases} x_0 = c \in I \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Comme $f: x \mapsto x - \frac{F(x)}{F'(x)}$ est continue sur I , si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle converge vers un pt fixe de f , i.e. un pt a tq:

$$f(a) = a \quad \text{i.e.} \quad a = a - \frac{F(a)}{F'(a)} \quad \text{i.e.} \quad F(a) = 0$$

- Théorème:

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $F \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$ telle que:

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad F'(x) > 0 \quad \text{et} \quad F''(x) \geq 0.$$

Alors:

1) F admet un unique zéro sur $[\alpha, \beta]$

2) $\forall c \in [\alpha, \beta]$, la suite (au moins) définie par
$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est bien définie et converge vers a en décroissant à partir du rang 1

3) Si on note $m = \min_{x \in [\alpha, \beta]} F'(x)$ et $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} F''(x)$ (exist car continue)

$$\text{alors: } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq x_{n+1} - a \leq \frac{M}{m} (x_n - a)^2$$

Démonstration:

1) On a F continue sur $[a; b]$ et $F'(a) < 0$ et $F'(b) > 0$
 donc par le théorème de valeurs intermédiaires, F admet un zéro dans $[a; b]$

Ensuite $F'(x) > 0 \forall x \in [a; b]$, F est strictement croissante sur $[a; b]$ (donc injective) et le zéro est unique.
 On a donc a .

2) Soit $f: x \mapsto x - \frac{F(x)}{F'(x)}$

f est bien définie sur $[a; b]$ car $F'(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$
 et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle
 et d'avis: $f(a) = a - \frac{F(a)}{F'(a)} > a$ et $f(b) < b$

(idem)
 car $F'(a) < 0$

donc $f([a; b]) \subset [a; b]$, donc la suite (uniquement bien définie)

$$\text{On a: } f'(x) = 1 - \frac{F'(x)F''(x) - F(x)F'''(x)}{F'(x)^2} \\ = \frac{F'(x)^2 - F'(x)F''(x) + F(x)F'''(x)}{F'(x)^2} = \frac{F'(x)F''(x)}{F'(x)^2}$$

donc f décroissante sur $[a; a]$ et croissante sur $[a; b]$
 et $f([a; a]) \subset [a; a]$ et $f([a; b]) \subset [a; b]$

• Si $\mu_0 = c \in [a; b]$, alors f croissante donc (uniquement) et monotone

$$\text{et: } f(x) - x = -\frac{F(x)}{F'(x)} \leq 0 \forall x \in [a; b]$$

donc $\mu_1 \leq \mu_0$ et (uniquement) décroissante

• Si $\mu_0 = c \in [a; a]$ alors f décroissante et $f(\mu_0) \geq f(a) = a$
 et donc $\mu_1 \in [a; b]$ et on recommence sans cas particuliers

Donc (uniquement) décroissante à partir de nous 1

Comme elle est bornée, elle est convergente

Comme f est continue, la limite de (uniquement) est un point fixe de f
 i.e. un zéro de F , i.e. a .

3) Par le théorème de Taylor-Lagrange, on a $\forall x \in [a; b], \exists c \in]a; x[$

$$F(a) = F(x) + (a-x)F'(x) + \frac{(a-x)^2}{2}F''(c)$$

$$\text{donc } f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x + \frac{(a-x)F'(x)}{F'(x)} + \frac{(a-x)^2}{2} \frac{F''(c)}{F'(x)} \\ = a + \frac{(a-x)^2}{2} \frac{F''(c)}{F'(x)}$$

$$\text{Mais } \forall x \in [a; b], 0 \leq f(x) - a \leq \frac{(a-x)^2}{2} M$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \mu_{n+1} - a \leq \frac{2M}{2^{n+1}} (\mu_n - a)^2$$

Aiguille DE BUFFON

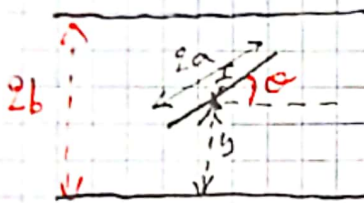
- Exercice:

On suppose que dans une chambre, dont le parquet est simple et droit, les joints parallèles, on jette au hasard une aiguille.

Deux joueurs font un pari:

- Le 1^{er} pense que l'aiguille ne touchera aucune ligne du parquet
 - Le 2^e pense qu'elle croisera quelques-unes de ces parallèles
- Qui a le plus de chance de gagner? (L'aiguille a une longueur $2a$ et le lamage du parquet un écart de $2b$)

- Solution:



On désigne par y ($0 \leq y \leq 2b$) la distance du milieu I de l'aiguille à la raie la plus proche.

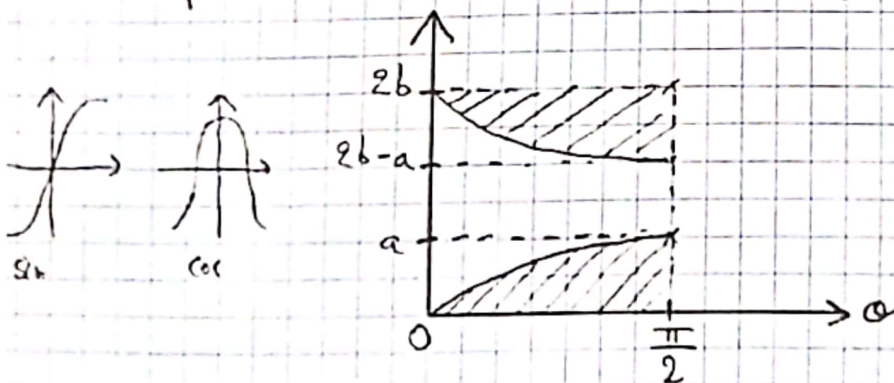
On désigne par α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) l'angle de l'aiguille avec la direction des lames.

L'aiguille aura donc une intersection avec la raie du bas (ou celle du haut) si:

$$y + a \sin \alpha \geq 2b \quad \text{ou} \quad y - a \sin \alpha \leq 0$$

i.e. $y \geq 2b - a \sin \alpha \quad \text{ou} \quad y \leq a \sin \alpha$

Tracons les courbes requises: $a \sin \alpha$ et $2b - a \sin \alpha$ en fonction de α sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$



Pour que l'aiguille coupe une raie, il faut que le point (y, α) appartienne à la zone hachurée.

La distribution de α sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et de y sur $[0; 2b]$ est uniforme, donc la probabilité $\frac{1}{2}$ que l'aiguille touche une raie est:

Aire hachurée

$$\text{Aire du rectangle } [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 2b]$$

L'aire du rectangle est : $A_R = 2b \times \frac{\pi}{2} = b\pi$

Les 2 parties hachurées étant symétriques, on a :

$$\begin{aligned} A_H &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin \theta \, d\theta \\ &= 2a [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2a \times (-0 + 1) \\ &= 2a \end{aligned}$$

d'où la probabilité p que l'aiguille touche une rainure est :

$$\begin{aligned} p &= \frac{A_H}{A_R} \\ &= \frac{2a}{b\pi} \end{aligned}$$

Pour que le 1^{er} joueur ait le plus de chances de gagner il faut que :

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{2a}{b\pi} \geq \frac{1}{2} \\ \text{i.e.} \quad \frac{a}{b} &\geq \frac{\pi b}{4} \end{aligned}$$

Remarque :

En répétant cette expérience (et avec la b^e de grande maille)
on peut obtenir une approximation de π .

EXERCICE DE DEMONSTRATION LIMITE D'UNE

FONCTION RECIPROQUE

Lice Mathématique et Sciences MPS I

- Exemple:

On note $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(1+x^2) - x$

- 1) Montrer que f est bijective.
- 2) Donner le $D_2(0)$ de f^{-1} .

- Résolution:

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2}$

$$= -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0$$

et f' ne s'annule que pour $x=1$
de plus: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Dans par le théorème de bijection monotone f est bijective

2) Donner le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		0	$-\infty$

on voit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-\infty, +\infty[$

et que f' ne s'annule que au point $x=1$

Donc f réalise une bijection de I sur $J =]-\infty, +\infty[$

et la bijection réciproque notée f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J

Par le théorème de Taylor-Young, f^{-1} admet donc un DL à

tout ordre en 0 , en particulier d'ordre 4.

et $\exists$ donc a, b, c et d réels tels que $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4)$

(car $f(0) = 0$ et $f^{-1}(0) = 0$)

En notant $x = f^{-1}(y)$ on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \ln(1+x^2) - x \\ &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) - x \\ &= -x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

d'où $x = f^{-1}(f(x))$

$$\begin{aligned} &= a(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4) + b(-x + x^2)^2 + c(-x + x^2)^3 + d(-x)^4 + o(x^4) \\ &= a(-x + x^2 - \frac{1}{2}x^4) + b(x^2 - 2x^3 + x^4) + c(-x^3 + 3x^4) + dx^4 + o(x^4) \\ &= -ax + (a+b)x^2 + (-2b-c)x^3 + (-\frac{1}{2}a + b + 3c + d)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Par unicité du d.e. d'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto x$ on a :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a+b = 0 \\ -2b-c = 0 \\ -\frac{1}{2}a + b + 3c + d = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -2 \\ d = \frac{9}{2} \end{cases}$$

d'où le DL₄(0) de f^{-1} : $f^{-1}(y) = -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9}{2}y^4 + o(y^4)$

DÉTERMINANT DE VANDERMONDE.

PAR DÉTERMINANT

(66 leçons)

Proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ on a:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Démonstration:

On le démontre par récurrence

• Si $n=1$: évident.

• Supposons que c'est vrai au rang $n-1$ et posons:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On effectue: $L_j \leftarrow L_j - L_1 \quad \forall j \in [2, n]$, d'où:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

opérations par rapport à la 1^{ère} colonne

Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$ on a: $(a^i - b^i) = (a - b)(b^{i-1} + b^{i-2}a + \dots + ba^{i-2} + a^{i-1})$
 en factorisant par $(x_j - x_1)$ dans le déterminant précédent
 on obtient:

$$V_n = \prod_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 & \dots & x_1^{n-2} + x_1 x_2 + \dots + x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 + x_1 & x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2 & \dots & x_1^{n-2} + x_1 x_3 + \dots + x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & x_1^2 + x_1 x_n + x_n^2 & \dots & x_1^{n-2} + x_1 x_n + \dots + x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

et $\forall i \in [2; n-1]$ on effectue $C_i \leftarrow C_i - x_1^{i-1} C_1$

d'où :

$$V_n = \prod_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_1 x_2 + x_2^2 & \dots & x_1^{n-3} x_2 + \dots + x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_1 x_3 + x_3^2 & \dots & x_1^{n-3} x_3 + \dots + x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_1 x_n + x_n^2 & \dots & x_1^{n-3} x_n + \dots + x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ensuite $\forall i \in [3; n-1]$ on effectue $C_i \leftarrow C_i - x_1^{i-2} C_2$
etc.
et on obtient :

$$V_n = \prod_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

et par hypothèse de récurrence on a alors :

$$\begin{aligned} V_n &= \prod_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_1) \prod_{2 \leq k \leq n} (x_k - x_2) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_1) \end{aligned}$$

DIAGONALISATION SIMULTANÉE

(Ket-nare)

Enoncé:

Soit E un K -e.v. de dim. finie $n \in \mathbb{N}^*$

1) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E .
Montrer l'équivalence entre:

- (i) $\exists$ une base $\mathcal{B}$ de E tq $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales.
- (ii) $u \circ v = v \circ u$

2) Soit S une matrice réelle symétrique positive d'ordre n

a) Montrer qu'il existe une matrice réelle symétrique positive T tq $T^2 = S$

b) Deducer de la question a) l'existence de T .

Solution:

1) (i) $\Rightarrow$ (ii):

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
Comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tq:
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = \alpha_i e_i$
et $\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tq:
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(e_i) = \beta_i e_i$
pour la même raison.

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \circ v(e_i) = u(\beta_i e_i) = \beta_i \alpha_i e_i$
et $v \circ u(e_i) = \alpha_i \beta_i e_i$
donc $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$
donc $u \circ v = v \circ u$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u
et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})$ les s.e.p. associés.

Comme u et v commutent par hypothèse, les E_i sont stables par v .

Donc $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, on peut considérer v_i l'endomorphisme de E_i induit par v . Comme u est diagonalisable, v_i l'est aussi.

Donc $\exists$ une base $\mathcal{B}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres de v_i (et donc de v).

Tout vecteur de E_i est vecteur propre de u , donc c'est le cas $\forall i$ de la base $\mathcal{B}_i$.

Donc les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont à la fois vecteurs propres de u et v .

Soit alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$. Comme u est diagonalisable, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^m E_i \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \text{ est une base de } E.$$

2) a) Par le théorème spectral, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^t P D P$ avec :

$D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et λ_i valeurs propres de S (pas forcément distinctes).

Comme S est positive, alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda_i \geq 0$.

On pose :

$$\Delta = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_m}) \quad \text{et} \quad T = {}^t P \Delta P$$

alors on a :

$$T^2 = {}^t P \Delta \underbrace{P {}^t P}_{=I_m} \Delta P = {}^t P \Delta^2 P = {}^t P D P = S$$

On a :

$${}^t T = {}^t ({}^t P \Delta P) = {}^t P {}^t \Delta {}^t ({}^t P) = {}^t P \Delta P = T$$

donc T est symétrique

et : T positive car T et Δ étant symétriques elles ont le même spectre.

b) Soit Q le polynôme d'interpolation de Lagrange tq $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$
 avec : $Q(X) = \sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, $\deg Q \leq m-1$

$$\text{On a : } Q(S) = Q({}^t P D P) = {}^t P Q(D) P = {}^t P \text{Diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_m)) P \\ = {}^t P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_m}) P$$

donc T est polynomiale en S .

Si $\exists K \in M_n(\mathbb{R})$ tq $K^2 = S$. K et S commutent.

Comme T polynomiale en S , alors K et T commutent aussi.
 K et T sont diagonalisables et commutent, donc par 1) K et T sont diagonalisables dans une base commune.

Donc $\exists H \in GL_n(\mathbb{R})$ et A et B matrices diagonales telles que :

$$\text{et } T^2 = K^2 \Rightarrow A^2 = B^2 \Rightarrow A = B \quad (\text{car coeff. } \geq 0)$$

et donc $T = K$

SYSTEMES DIFFERENTIELS

(Math ou l'été Analyse) (Grandon)

- Enoncé:

Déterminer les solutions réelles des systèmes différentiels suivants.

a)
$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x'' + x' + 4y' - x - 3y = 0 \\ y'' - 3y' + x + 3y = 0 \end{cases}$$

- Solution:

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ainsi le système s'écrit: $X' = AX$
où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On a: $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & -1-X & -1 \\ 0 & 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)((-1-X)(1-X) + 2)$
 $= (1-X)(X^2 - 1 + 2)$
 $= (1-X)(X^2 + 1)$
 $= (1-X)(X-i)(X+i)$
 Valeurs propres: 1, i et -i

on diagonalise A:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = x \\ -y - z = y \\ 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ 2y + z = z \end{cases}$

donc $\text{Ker}(A - 1I_3) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = ix \\ -y - z = iy \\ 2y + z = iz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-z}{1-i} \\ y = \frac{-z}{-1-i} = \frac{z}{1+i} \end{cases}$

donc si $z = -1$, $x = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2}$

et $y = \frac{-1}{1+i} = \frac{-1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-i}{2}$

donc $\text{Ker}(A - iI_3) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

et de même

$$\text{Ker}(A + iI_3) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

On va trouver la solution complexe puis déterminer les solutions réelles en prenant la partie réelle et imaginaire de celles

Soit $\lambda \in \{1, -i, i\}$. Si $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^3$ est solution de vérifie $X(t) \in \text{Ker}(A - \lambda I) \forall t$

$$\text{alors on a: } X' = AX = \lambda X$$

$$\text{donc: } X = e^{\lambda t} X(0) \text{ avec } X(0) \in \text{Ker}(A - \lambda I)$$

Et réciproquement, X définie ainsi est bien solution

Par linéarité, on en déduit que les λ solutions:

$$t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

sont des solutions

et c'est la solution générale car l'espace des solutions est de dim. 3

Pour obtenir la solution réelle générale on écrit:

$$t \mapsto \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1-i}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \nu (\cos t - i \sin t) \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on garde la partie réelle

$$b) \begin{cases} x'' + x' + 4y' - 2x - 3y = 0 & (1) \\ y'' - 3y' + 2x + 3y = 0 & (2) \end{cases} \quad (1) + (2) \Rightarrow x' + y' + x' + y' = 0$$

donc $x' + y'$ est solution de l'équation

$$\text{différentielle } z' + z = 0$$

$$\text{et donc } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } x' + y' = \lambda e^{-t}$$

$$\text{Par intégration, } \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } x + y = \alpha + \beta e^{-t}$$

on remplace dans (2):

$$y'' - 3y' + 2y = -\alpha - \beta e^{-t} \quad (3)$$

On résout l'équation homogène associée à cette dernière équation diff.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Equation caractéristique: $(X-1)(X-2) = 0$ et ses solutions sont donc de la forme: $t \mapsto \gamma e^t + \delta e^{2t}$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Cherchons une solution particulière de (3) sous la forme $a + b e^{-t}$

$$\text{donc: } y'' - 3y' + 2y = b e^{-t} + 3b e^{-t} + 2a + 2b e^{-t} = -\alpha - \beta e^{-t}$$

$$6b = -\beta \text{ et } 2a = -\alpha, \text{ d'où } b = -\frac{\beta}{6} \text{ et } a = -\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{donc la solution générale de (3) est: } t \mapsto -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6} e^{-t} + \gamma e^t + \delta e^{2t}$$

avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Or : $x = \alpha + \beta e^{-t} - \gamma$

donc la solution du système est

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Groupe monozyklisch, Gruppe zyklisch. Exerpts

Théorème:

- (1) Les sg de $(\mathbb{Z}, +)$ sont $f_m (m\mathbb{Z}, +)$ pour $m \in \mathbb{N}$
- (2) Tout groupe monozyklisch infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$
- (3) Tout groupe cyclique d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Preuve:

- 1) $\forall m \in \mathbb{N}, m \neq 0$ a. un sg de $\mathbb{Z}$
 - On définit tout sg de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $m\mathbb{Z}$.
 - $0\mathbb{Z} = \{0\}$ a. un sg de $\mathbb{Z}$
 - Soit $(H, +)$ un s.g. de $\mathbb{Z}$ non réduit à 0.
- Quel que soit a , considère un opposé, $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$
 donc il existe un minimum m
 et donc $m\mathbb{Z} \subset H$
 Montre que $H \subset m\mathbb{Z}$, i.e. que $H \cap \mathbb{N} \subset m\mathbb{N}$
 Soit $h \in H \cap \mathbb{N}$
 alors $\exists q \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, m-1]$ tq $h = qm + r$
 par division euclidienne.
 on a: $h - qm \in H$ car h et $qm \in H$.
 donc $r \in H$
 mais par hypothèse sur m , on a alors $r = 0$
 et donc $h = qm \in m\mathbb{Z}$
 d'où $H \subset m\mathbb{Z}$
 d'où $H = m\mathbb{Z}$

2) Soit $(G, \cdot)$ un gr cyclique d'ordre n engendré par g
 Soit $f: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \cdot)$ définie par:

$$f(\bar{k}) = g^k$$

f est un morphisme.

On a: $f(\bar{k}) = f(\bar{k}')$ ssi $g^k = g^{k'}$ ssi $g^{k-k'} = 1$
 ssi $k - k' \in n\mathbb{Z}$
 ssi $\bar{k} = \bar{k}'$

donc f est un monomorphisme

- par définition, $\forall a \in G, \exists k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tq $a = g^k$
 donc f est un épimorphisme

Donc f est un isomorphisme.

3) Soit $(G, \cdot)$ un groupe monogène infini engendré par un élément g .

Soit $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \cdot)$ définie par $f(k) = g^k$
 f est un morphisme.

- Par définition de G , $\forall n \in G, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = g^k$
 donc f est un épimorphisme.

- Soient $n, s \in \mathbb{Z}$ tq $g^n = g^s$, alors $g^{n-s} = 1$
 donc f est un monomorphisme.

Donc f est bien un isomorphisme.

- Exemple: Soit A un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$
 Alors:

- (i) ou bien $\exists m > 0$ tq $A = m\mathbb{Z}$
- (ii) ou bien A est dense dans $\mathbb{R}$.

- Preuve: Soit $A^{+*} = A \cap \mathbb{R}^{+*}$ et $m = \inf A^{+*}$

• Si $m > 0$:

- alors $m \in A^{+*}$
 en effet, si $m \notin A^{+*}$ on peut trouver $x, y \in A^{+*}$ tq
 $m < x < y < 2m$
 (par définition de la borne inférieure)
 et dans ce cas $0 < y - x < m$: absurde!
 $\in A^{+*}$

donc $m \in A$
 et donc on a $m\mathbb{Z} \subset A$ car A est un groupe.

- Soit $x \in A$ et soit $n = \lfloor \frac{x}{m} \rfloor$

alors: $n \leq \frac{x}{m} < n+1$, d'où $nm \leq x < m(n+1)$

d'où $0 \leq x - nm < m$

$\in A$ donc $x = nm \in m\mathbb{Z}$
 donc $A \subset m\mathbb{Z}$

et donc $A = m\mathbb{Z}$

• Si $m = 0$:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$
 Comme $m = \inf A^{+*} = 0$ alors $\exists x \in A$ tq $0 < x < b - a$
 on pose: $n = \lfloor \frac{a}{x} \rfloor + 1$

donc $n-1 \leq \frac{a}{x} < n$ et donc $(n-1)x \leq a < nx$
 d'où: $a < nx = (n-1)x + x \leq a + x < a + (b-a) = b$

donc $\exists a, b \in \mathbb{R} \text{ tq } a < b \text{ et } a, b \in A \Rightarrow A \text{ est dense dans } \mathbb{R}$

Polynôme à coefficients réels ou complexes

Division euclidienne Théorème:

Étant donné deux polynômes A et B de $K[X]$ avec $B \neq 0$, $\exists$ un unique couple (Q, R) de polynômes de $K[X]$ vérifiant:

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg R < \deg B$$

Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B .

Exemple: $K[X]$ est un anneau commutatif principal.

Preuve de la division euclidienne:

Unicité: Si $\exists$ deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) tq $A = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$
 $A = BQ_2 + R_2$ avec $\deg R_2 < \deg B$

Alors on a: $(Q_1 - Q_2)B = R_2 - R_1$
on a donc:

$$\deg(Q_1 - Q_2) + \deg B = \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg B$$

donc $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$, i.e. $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ et $Q_1 - Q_2 = 0$
i.e. $Q_1 = Q_2$
et on a alors aussi $R_1 = R_2$.

Existence: Si B fixé, montrer par récurrence que la propriété soit $\forall m \in \mathbb{N}$,
 $\forall A$ polynôme de $K_m[X]$, $\exists$ un couple $(Q, R) \in K[X]^2$ tq $A = QB + R$
avec $\deg R < \deg B$

- Si $m = 0$, A est un polynôme constant

- Si $\deg B \geq 1$ alors $A = 0B + A$ et $(0, A)$ convient
(car $\deg A \leq \deg B$)

- Si $\deg B = 0$, alors $\exists \lambda \in K^*$ tq $B = \lambda$
et on a: $A = \frac{A}{\lambda} \lambda + 0$

et le couple $(\frac{A}{\lambda}, 0)$ convient

- Supposons que la propriété est vraie pour $m \in \mathbb{N}$ et soit $A \in K_{m+1}[X]$
 - Si $\deg A \leq m$, alors l'hypothèse de récurrence s'applique et $\exists (Q, R)$ correspondant
 - Si $\deg A = m+1$, alors $A = \lambda X^{m+1} + S$ avec $S \in K_m[X]$
 - Si $\deg B > m+1$, alors $A = 0B + A$ et $(0, A)$ convient
 - Si $\deg B = p \leq m+1$, alors $B = \mu X^p + T$ avec $p \in \mathbb{N}^+$ et $\deg T < p$ et $\mu \neq 0$
- Soit $A_1 = A - \frac{\lambda}{\mu} X^{m+1-p} B$
alors $\deg A_1 \leq m$ et par l'hypothèse de récurrence:
 $\exists (Q_1, R_1) \text{ tq } A_1 = BQ_1 + R_1$ et $\deg R_1 < \deg B$
d'où $A = BQ_1 + R_1 + \frac{\lambda}{\mu} X^{m+1-p} B$

$$= B \left(Q_1 + \frac{\lambda}{\mu} X^{m+1-p} \right) + R_1$$

et le couple (Q, R_1) convient
et donc la propriété est vraie au rang $m+1$

Preuve du Corollaire:

Soit I un idéal de $K[X]$.

- Si $I = \{0\}$, alors $I = 0K[X]$
- Si $I \neq \{0\}$, alors soit $\mathcal{P} = \{ m / \exists P \in I \text{ tq } \deg P \neq 0 \text{ et } \deg P = m \}$
 $\mathcal{P}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, alors on a:
 $\exists$ un entier minimal $m_0 \in \mathcal{P}$ et un polynôme $P_0 \in I$ de degré m_0 .

- On a alors $P \in K[X] \subset I$ par définition d'un idéal
- Soit $A \in I$. Alors par le diviseur euclidien de A par P_0 on a:
 $A = P_0 Q + R$ avec $\deg R < \deg P_0$
d'où $R = A - P_0 Q \in I$ (car A et $P_0 Q \in I$)
mais $\deg R < \deg P_0$, alors $R = 0$
et $A = P_0 Q$, et donc $A \in P_0 K[X]$
d'où $I \subset P_0 K[X]$

Donc $I = P_0 K[X]$
D'où tout idéal est principal; comme $K[X]$ intègre alors $K[X]$ avec principal

Groupe orthogonal d'un e.v. euclidien de dimension 2, de dimension 3

Proposition. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
On a équivalence entre:
1/ $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
2/ ${}^t\Omega\Omega = I_n$

Preuve. Soit g l'endom. de $\mathbb{R}^n$ représentée par Ω dans la base canonique
Alors: $(\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle)$

$$\Leftrightarrow (\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t(\Omega X) \Omega Y = {}^tXY)$$

$$\Leftrightarrow (\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX({}^t\Omega\Omega)Y = {}^tXY)$$

On applique la dernière égalité à $X = E_i$ et $Y = E_j$.
 ${}^tX Y = 1$ si

$$(0 \dots 0 \underset{i}{1} \dots 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \text{ si } i=j \text{ et } 0 \text{ si } i \neq j$$

$${}^t({}^t\Omega\Omega)E_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{mj} \end{pmatrix} \text{ si } {}^t\Omega\Omega = (w_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$$

$$({}^t\Omega\Omega) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ à } j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } E_i ({}^t\Omega\Omega) E_j = w_{ij}$$

$$\text{donc } w_{ij} = 1 \text{ si } i=j \text{ et } 0 \text{ sinon} \Leftrightarrow {}^t\Omega\Omega = I_m$$

Exemple.

1) Déterminer l'endomorphisme f de E dont la matrice dans B est:

$$\Omega = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^t \text{On a } \det \Omega &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow +2l_3 \\ &= \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \times (-9 + 36) = \frac{27}{27} = 1 \end{aligned}$$

donc f est une rotation.

* On va résoudre $\Omega x = v$ pour $\{ \text{vect. li. linéaires} \}$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 & (1) + (2) \\ -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2z = 5x + x = 6x \\ z = 5x - 2x = 3x \end{cases}$$

donc $\text{Im}(\Omega) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \vec{x}$ $\triangle$ TL (tout prend $\vec{x}$ comme vecteur!)

* On a $1 + 2\cos\theta = \frac{1}{3}(-2 - 2 + 2) = -\frac{2}{3}$

i.e. $2\cos\theta = -\frac{5}{3}$ i.e. $\cos\theta = -\frac{5}{6}$

* Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur de E non colinéaire à $\vec{x}$

$$\text{on a } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } [x, \Omega(x), \vec{x}] = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

donc $\sin\theta > 0$ tq $\cos\theta = -\frac{5}{6}$

2) Déterminer l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est:

$$\Omega = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} * \det \Omega &= \left(-\frac{1}{9}\right)^3 \begin{vmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{9}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 36 & -63 \\ 0 & -9 & 36 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = +81 \\ &= \left(-\frac{1}{9}\right)^3 \begin{vmatrix} 36 & -63 \\ -9 & 36 \end{vmatrix} = -\frac{1}{729} (1296 - 567) = -\frac{729}{729} = -1 \end{aligned}$$

* On a Ω symétrique et $\det \Omega = -1$

donc réflexion/plane

* On cherche le plan de invariants.

$$-\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 4y + z = -9 \\ 4x + 7y + 4z = -9 \\ x + 4y - 8z = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 4x + 16y + 4z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 4y + z = 0$$

donc Plan de symétrie =
pour équation: $x + 4y + z = 0$

On a aussi: $x = -4y - z$

donc le plan a pour vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car;
 $-1 + 0 + 1 = 0$
 $-4 + 4 + 0 = 0$

Vérification: $\begin{vmatrix} -1 & -4 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & z \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -4 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}$
 $= -z + (-4y - x)$
 $= -z - 4y - x$

3) Déterminer l'endom. f de E dont la matrice dans B est:

$$\Omega = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

* On a: $\det \Omega = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{64}\right) \begin{vmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 4 & 4 & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = +P_2$
 $= \left(-\frac{1}{64}\right) \left[\sqrt{6} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \right] = \left(-\frac{1}{64}\right) \left[\sqrt{6}(2\sqrt{6}) + 2(12-4) \right]$
 $= \left(-\frac{1}{64}\right) [48 + 16] = -\frac{64}{64} = -1$

On cherche les invariants par $\Omega X = -X$

$$-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + \sqrt{6}z = 4x \\ x + 3y - \sqrt{6}z = 4y \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \sqrt{6}z \\ z = \frac{\sqrt{6}}{2}y + \frac{\sqrt{6}}{2}x = \frac{\sqrt{6}}{2}y - \frac{\sqrt{6}}{2}(y + \sqrt{6}z) \\ = \frac{\sqrt{6}}{2}y - \frac{\sqrt{6}}{2}y + \frac{6}{2}z = 3z \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ donc } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de } \Delta \Rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur unitaire directeur de } \Delta$$

$$\begin{aligned} * \text{ On a } \text{tr} \Omega &= -1 + 2 \cos \theta = -1 + 2 \cos \theta = -\frac{1}{4} (3 + 3 + i) \\ &\Rightarrow 2 \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

* On prend $x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{v}$

$$f(x) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos [x, f(x); \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc rotation autour de Δ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exemple du cours : Déterminer la base duale de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\forall i \in \{1, 2, 3\}$ on doit avoir $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

et $\forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on doit avoir $e_i^*(v) = a_i x + b_i y + c_i z$

$$\text{on a : } \begin{cases} e_1^*(e_1) = 1 \\ e_1^*(e_2) = 0 \\ e_1^*(e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ a_1 - c_1 = 0 \\ b_1 + c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = c_1 \\ c_1 = -b_1 + a_1 \\ a_1 - a_1 + a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_2^*(e_1) = 0 \\ e_2^*(e_2) = 1 \\ e_2^*(e_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 - c_2 = 1 \\ b_2 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = -c_2 \\ a_2 = 1 + c_2 \\ 1 + c_2 - c_2 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ a_2 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_3^*(e_1) = 0 \\ e_3^*(e_2) = 0 \\ e_3^*(e_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 = 0 \\ a_3 - c_3 = 0 \\ b_3 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = c_3 \\ b_3 = 1 - c_3 \\ c_3 + 1 - c_3 + c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = -1 \\ b_3 = 2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

d'où $\forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ on a : $\varphi(v) = \sum_{i=1}^3 \varphi(e_i) e_i^*(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$

$$\text{avec } \begin{cases} e_1^*(v) = x - y + z \\ e_2^*(v) = y - z \\ e_3^*(v) = -x + 2y - z \end{cases}$$

Exemple 2 : base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

on doit avoir $\forall i, j \in \mathbb{N}$: $e_i^*(x^j) = \delta_{ij}$

donc $\forall$ polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ on doit avoir :

$$e_i^*(P) = a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$$

- Interprétation matricielle.

on a $e_i^t(e_j) = \delta_{ij}$

$$\text{donc } e_1^t \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \right) = I_m$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_L \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_C$$

donc $LC = I_m$ d'où $L = C^{-1}$

- Exemple: Les polynômes d'Interpolation de Lagrange

Soient $n+1$ scalaires $a_0, \dots, a_n$

Ils déterminent $n+1$ jans de $K[X]_{\leq n}$ donnés par:

$$\varphi^i(p) = p(a_i) \quad \forall p \in K[X]_{\leq n}$$

On définit n polynômes d'interpolation de Lagrange L_i avec:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \dots$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$$

$$\text{On a: } \varphi^i(L_j) = L_j(a_i) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_i - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_j - a_k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

donc la famille φ^i et L_j sont duales l'une de l'autre

Théorème de base pour la dualité:

Prop: Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ est : ${}^t P^{-1}$

Preuve Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ et $\mathcal{B}' = \{p_1, \dots, p_n\}$ bases de E
Soit $P = (a_{ij})_{i,j \in [1,m]}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$$P = \begin{pmatrix} \uparrow & & \\ & \uparrow & \\ & & \uparrow \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{matrix}$$

Soit $Q = (b_{ij})_{i,j \in [1,m]}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$

$$Q = \begin{pmatrix} \uparrow & & \\ & \uparrow & \\ & & \uparrow \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_m^* \end{matrix}$$

Alors $\forall j, k \in [1,m]$ on doit avoir : $f_j^*(p_k) = \delta_{jk}$

$$\text{et } f_j^*(p_k) = f_j^* \left(\sum_{\ell=1}^m a_{\ell k} e_\ell \right)$$

$$= \left(\sum_{z=1}^m b_{zj} e_z^* \right) \left(\sum_{\ell=1}^m a_{\ell k} e_\ell \right)$$

$$= \sum_{z=1}^m \sum_{\ell=1}^m b_{zj} a_{\ell k} \delta_{z\ell}$$

$$= \sum_{z=1}^m b_{zj} a_{zk} = \delta_{jk}$$

$$\text{donc } {}^t Q P = I_m$$

$$\text{et donc } {}^t P Q = {}^t I_m = I_m$$

$$\text{d'où } Q = {}^t P^{-1}$$

$(\ell^2(\mathbb{N}, E); \|\cdot\|_{\ell^2})$ est un Banach

Théorème: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.
Soit $\ell^2(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$ soit convergente.
Alors si on pose $\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ alors $(\ell^2(\mathbb{N}, E), \|\cdot\|_{\ell^2})$ est un espace de Banach.

Preuve: On montre que $(\ell^2(\mathbb{N}, E); +, \cdot)$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$ -e.v. de suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- $\ell^2(\mathbb{N}, E)$ est non vide car la suite nulle est un élément
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, E)$ alors

comme $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a: $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

on a:
$$\sum_{k=0}^n \|u_k + v_k\|^2 \leq 2 \left(\sum_{k=0}^n \|u_k\|^2 + \sum_{k=0}^n \|v_k\|^2 \right)$$

donc si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ converge, il en va de même de $(u_n + v_n)_n$ et $(u_n + v_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, E)$

- On a:
$$\sum_{k=0}^n \|\lambda u_k\|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=0}^n \|u_k\|^2$$

donc $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, E)$

donc $(\ell^2(\mathbb{N}, E); +, \cdot)$ est un e.v.

On montre que $\|\cdot\|_{\ell^2}$ est une norme, sur $\ell^2(\mathbb{N}, E)$.

- $\|u\|_{\ell^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$

$\Leftrightarrow (u_n)_n$ est la suite nulle

donc $\|\cdot\|_{\ell^2}$ est bien définie.

- On a $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|\lambda u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|u\|_{\ell^2}$

- On a $\forall m \in \mathbb{N},$

$$\left(\sum_{k=0}^m \|u_k + v_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^m \|u_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=0}^m \|v_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

par l'inégalité de Minkowski

donc l'inégalité triangulaire est vérifiée
et donc $\|\cdot\|_{\ell^2}$ est bien une norme.

a. On montre que $(\ell^2(N, E), \|\cdot\|_2)$ est complet:

- Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\ell^2(N, E))$

(avec: $U_p = (u_{p,1}, u_{p,2}, \dots, u_{p,m}, \dots)$)

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy on a:

$$\exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall p, q \geq p_0, \|U_p - U_q\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|u_{p,n} - u_{q,n}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

$$\text{et donc } \forall m \in \mathbb{N} \text{ on a: } \forall p, q \geq p_0: \|u_{p,m} - u_{q,m}\| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{p,m})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E
donc elle converge vers $a_m \in E$

- On va montrer que $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^2(N, E)$:

Comme $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée.
Donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|U_p\|_2^2 \leq M$$

$$\text{On a } \forall N \in \mathbb{N}: \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \|u_{p,n}\|^2 = \sum_{n=0}^N \|a_n\|^2$$

$$\text{mais } \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \|u_{p,n}\|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_{p,n}\|^2 \leq M$$

donc par passage à la limite: $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N \|a_n\|^2 \leq M$
d'où la suite $\sum \|a_n\|^2$ est convergente
et donc: $A = (a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^2(N, E)$

- On montre que la suite de Cauchy $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente vers A :

Soit $\varepsilon > 0$ et $p_1 \in \mathbb{N}$ tq:

$$\forall p \geq p_1, q \geq p_1, \|U_p - U_q\|_2^2 \leq \varepsilon$$

$$\text{alors } \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \|u_{p,n} - u_{q,n}\|^2 = \sum_{n=0}^N \|u_{p,n} - a_n\|^2$$

$$\text{Comme } \forall q \geq p_1, \sum_{n=0}^N \|u_{p,n} - u_{q,n}\|^2 \leq \|U_p - U_q\|_2^2 \leq \varepsilon$$

$$\text{alors qd } q \rightarrow +\infty \text{ on a: } \sum_{n=0}^N \|u_{p,n} - a_n\|^2 \leq \varepsilon$$

$$\text{D'où } \forall p \geq p_1: \|U_p - A\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_{p,n} - a_n\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \|u_{p,n} - a_n\|^2 \leq \varepsilon$$

donc $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente vers A

et donc $(\ell^2(N, E), \|\cdot\|_2)$ est complet.

Différentiels de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Application.

Formule de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a; b]$, on classe $\mathcal{C}^n$ sur ce segment et $f^{(n+1)}$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, alors $\exists c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Preuve. Soit l'application g définie sur le segment $[a; b]$ par:

$$\forall x \in [a; b], g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}$$

On a: $g(b) = f(b)$
On choisit A tel que $g(a) = g(b) = f(b)$

L'application g est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ avec $\forall x \in]a; b[$:

$$g'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \frac{A}{n!} (b-x)^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - \frac{A}{n!} (b-x)^n$$
$$= \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - A)$$

Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées.

Soit alors un élément $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$

Alors $g'(c) = 0$ entraîne $A = f^{(n+1)}(c)$

Donc en remplaçant A par $f^{(n+1)}(c)$ dans l'expression de g on a donc:

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}$$

$$\text{puisque } g(a) = f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

- Formule de Taylor avec reste, intégral:

Soit $m \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs dans un espace de Banach de dimension $n+1$ sur un segment $[a; b]$, alors:

$$f(b) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!} (b-t)^m dt$$

- Preuve: On effectue la preuve par récurrence sur m .

Pour $m=0$:
 f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$

Supposons la propriété vraie au rang m .
 f est de classe $\mathcal{C}^{m+2}$, donc on peut intégrer par parties:

$$\int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt = \left[-\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t) dt$$

$$\text{donc } f(b) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \left[-\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - \underbrace{\frac{(b-b)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(b)}_0 + \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a)$$

$$+ \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+2)}(t) dt$$

Formule de Taylor-Young:

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est m -fois dérivable en un point a de I .
Alors:

$$f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + o((t-a)^m) \quad \forall t \in I$$

Preuve: On effectue la preuve par récurrence

• Si $m=1$: f est dérivable une fois et on utilise le développement limite de f en a à l'ordre 1

• Supposons la propriété vraie au rang m :

Soit une application f , $(m+1)$ -fois dérivable en a et soit R l'application définie sur I par:

$$\forall t \in I, R(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

Elle est dérivable sur un voisinage de a avec:

$$\begin{aligned} R'(t) &= f'(t) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \\ &= f'(t) - \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (t-a)^k \end{aligned}$$

L'application f' est m -fois dérivable en a et on utilise la propriété au rang m on a:

$$R'(t) = o(t-a)^m$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists$ un intervalle J centré en a t.q.

$$\forall t \in J, \|R'(t)\| \leq \varepsilon |t-a|^m$$

Soit la fonction g à valeurs réelles définie sur J par:

$$\forall t \in J, g(t) = \frac{\varepsilon (t-a)^{m+1}}{m+1}$$

elle est dérivable sur J et $g'(t) = \varepsilon |t-a|^m$

Avec l'aide de l'inégalité des accroissements finis et en discutant suivant la position de t par rapport à a on obtient:

$$\forall t \in J, \|R(t) - R(a)\| = \|R(t)\| \leq \frac{\varepsilon |t-a|^{m+1}}{m+1}$$

d'où $R(t) = o(t-a)^{m+1}$

$$\|R(t) - R(a)\| \leq g(t) - g(a) \text{ si } \|R'(t)\| \leq g'(t)$$

Fonction développable en série entière. Exercice de application
Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus

1) Résolution d'une équation différentielle:

Trouver la solution de (E) $2xy' + y = \frac{2}{1-x}$ développable en série entière en 0

Solution Soit $r > 0$ et y une application développable en série entière en 0 ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à r

$$\forall x \in]-r; r[, y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On sait que y est dérivable sur $] -r; r[$ et on peut dériver terme à terme:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

d'où:

$$\begin{aligned} 2xy'(x) + y(x) &= 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^n \end{aligned}$$

On sait aussi que $\frac{2}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x^n$
 donc y est solution de (E) sur $] -r; r[$ si:

$$\forall x \in]-r; r[, \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^n = \frac{2}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x^n$$

donc par unicité du développement en série entière de $\frac{2}{1-x}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (2n+1) a_n = 2$$

$$\text{i.e. } a_n = \frac{2}{1+2n} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

ainsi y solution de (E) si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$

RÉSOLUTION D'UN SDL1 SSM à coeff. constant, non diagonalisable (MONIER MP, 2009)

- Exercice: Résoudre le système (S):

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

 d'inconnues x, y et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables

- Solutions Il s'agit d'un SDL1 sans second membre.
 La matrice associée à S est: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

• On cherche le polynôme caractéristique de A:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(A - xI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 10 & -5-x & 7 \\ 4 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ 10 & -5-x & -3-2x \\ 4 & -2 & -2-x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (z_3 \in \mathbb{R} + 2z_2) \\ \downarrow \end{matrix} \\ &= (2-x)((-5-x)(-2-x) + 2(-3-2x)) + 10(-2-x) - 4(-3-2x) \\ &= (2-x)(x^2 + 3x + 4) - 2x - 8 \\ &= 2x^2 + 6x + 8 - x^3 - 3x^2 - 4x - 2x - 8 \\ &= -x^3 - x^2 \\ &= -x^2(x+1) \end{aligned}$$

donc les valeurs propres sont 0 (double) et -1 (simple)

• On cherche $E_{-1}(A)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 10x - 4y + 7z = 0 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 10x - 4y + 7z = 0 \\ -2x - z = 0 \quad (L_3) - 2(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = -x \end{cases}$$

donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $E_{-1}(A) = \text{Vect}(V_1)$

• On cherche $E_0(A)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 10x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 0x + 0y - 3z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} \quad (L_2) - 5(L_1)$$

donc $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $E_0(A) = \text{Vect}(V_2)$

et donc A non diagonalisable

• On trigonalise A :

• Soit $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (V_3 choisi $\because V_3 \notin \text{Vect}(V_1, V_2)$)

et soit $P = (V_1 \ V_2 \ V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (P inversible)

$$\text{et } AV_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = 7 \\ 2\alpha + \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\text{ssi: } \begin{cases} \alpha = -\beta + 2 \\ \gamma = +2\alpha + 2 \\ -\alpha + 2\beta = 7 \end{cases}$$

$$\text{ssi: } \begin{cases} \beta = -\alpha + 2 \\ \gamma = 2 + 2\alpha \\ \beta = \frac{7 + \alpha}{2} \end{cases}$$

Recl. 2

$$\text{ssi: } 7 + \alpha = -2\alpha + 4$$

$$3\alpha = -3$$

$$\alpha = -1$$

$$\text{d. } \beta = (-1) + 2 = 1$$

$$\text{d. } \gamma = 2 + 2(-1) = 0$$

• En notant: $T = P^{-1}AP$ on a: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrice triangulaire supérieure.
donc A est diagonalisable

• Soit $U = P^{-1}X$ (i.e. $X = PU$)

On a: $(s) \Leftrightarrow X' = AX$

$$\Leftrightarrow (PU)' = APU$$

$$\Leftrightarrow PU' = APU \quad (\text{car } P \text{ matrice constante})$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}PU' = P^{-1}APU$$

$$\Leftrightarrow U' = TU$$

en notant: $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ on a:

$$(s) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = -u - w \\ v' = 3w \\ w' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} w(t) = 0 \\ v(t) = 3\lambda_3 t + \lambda_2 \\ u(t) = \lambda_1 e^{-t} - \lambda_3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = P U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{-t} - \lambda_3 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 t \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La solution générale de S est donnée $\forall t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1 e^{-t} + 3\lambda_3 t + (\lambda_2 - \lambda_3) \\ y(t) = -\lambda_1 e^{-t} + 6\lambda_3 t + (2\lambda_2 + \lambda_3) \\ z(t) = -2\lambda_1 e^{-t} + 3\lambda_3 \end{cases}$$

$$\text{ou } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

LOI NORMALE

(Probab & Stats)

Définition / Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Proposition:

Alors f est une densité et si X a pour densité f ,
 on dit que X suit la loi normale centrée réduite.
 On note alors: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Preuve: f est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente ssi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

f est positive et $x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

donc $\forall M > 0, \exists x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $x \geq x_1 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq M$
 i.e. t.q. $f(x) \leq \frac{M}{x^2}$

d'où $\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \underbrace{\int_0^{x_1} f(x) dx}_{\text{fini}} + \underbrace{\int_{x_1}^{+\infty} \frac{M}{x^2} dx}_{\text{intégrale de Riemann convergente}}$

donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ aussi

• Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Soit $a > 0$ et posons $I(a) = \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

On a: $(I(a))^2 = \left(\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\int_0^a e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)$

$= \iint_{[0,a]^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$ (Par Fubini)

Considérons le quart de disque D_a :

$D_a = \{ (r \cos \theta; r \sin \theta) / r \in [0, a], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$

posons $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$

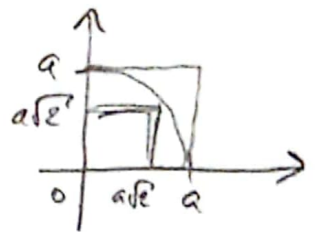
$$\text{et: } \Delta = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{matrix} dr \\ d\theta \end{matrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

d'où par changement de variables on pose:

$$\begin{aligned} J(a) &= \iint_{\mathbb{D}_a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \iint_{[0,a] \times [0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left(\int_0^a r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \right) \quad (\text{Fubini}) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\underbrace{-e^{-\frac{a^2}{2}}}_{\xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0} + e^0 \right] \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Maintenant on a: $\mathbb{D}_a \subset [0,a]^2 \subset \mathbb{D}_{a\sqrt{2}}$

et f étant positive on en déduit,



$$J(a) \leq (I(a))^2 \leq J(a\sqrt{2})$$

d'où par passage à la limite dans l'encadrement:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (I(a))^2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

THÉORÈME DU MINIMAX DE COURANT & FISCHER

(MP Méthodes & Exos 2014)

- Exercice: Soit $S \in S_m(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de S rangées de sorte que : $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$
 Pour chaque $n \in \{0, \dots, m-1\}$ on note F_n l'ensemble des
 sev de $\mathcal{U}_{m,1}(\mathbb{R})$ de dimension $m-n$.
 Démontrer que : $\forall n \in \{0, \dots, m-1\}$,

$$\lambda_{n+1} = \inf_{F \in F_n} \left(\sup_{X \in F, \|X\|=1} {}^t X S X \right)$$

- Solution :

ma: $S \in S_m(\mathbb{R})$, donc il existe $\Omega \in O_m(\mathbb{R})$ tq : $S = \Omega D \Omega^{-1}$
 où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$, notons C_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique
 de $\mathcal{U}_{m,1}(\mathbb{R})$ $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots C_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \{0, \dots, m-1\}$, notons $E_{n+1} = \text{Vect}(\Omega C_{n+1}, \dots, \Omega C_m)$
 $E_n = \text{Vect}(\Omega C_n, \dots, \Omega C_m)$

• Soit $X \in E_n : \exists (x_{n+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-n}$ tq : $X = \sum_{i=n+1}^m x_i \Omega C_i$

$$\text{d'où : } SX = \sum_{i=n+1}^m x_i S \Omega C_i$$

$$= \sum_{i=n+1}^m x_i \Omega D C_i \quad (\text{car } S = \Omega D \Omega^{-1} \Rightarrow S \Omega = \Omega D)$$

$$= \sum_{i=n+1}^m x_i \lambda_i \Omega C_i \quad (\text{car } D \text{ diagonale})$$

comme $(\Omega C_i)_i$ est orthonormale on a :

$${}^t X S X = \sum_{i=n+1}^m x_i (x_i \lambda_i)$$

$$\begin{aligned}
 \text{car } {}^tXSX &= {}^tX \sum_{i=1}^m x_i \lambda_i C_i \\
 &= \sum_{i=1}^m x_i \lambda_i {}^tXC_i \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^m x_i (\lambda_i x_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } {}^tXSX &= \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^m x_i^2 \\
 &\leq \lambda_{n+1} {}^tXX
 \end{aligned}$$

donc : $\forall X \in E_n$, si ${}^tXX=1$ alors ${}^tXSX \leq \lambda_{n+1}$

$$\text{d'où } \sup_{\substack{X \in E_n, \\ {}^tXX=1}} {}^tXSX \leq \lambda_{n+1}$$

• Soit $F \in \mathcal{F}_n$.

On a : $\dim F = m - n$ et $\dim E_{n+1} = n+1$

donc $\dim F + \dim E_{n+1} = m - n + n + 1 = m + 1 > m$

donc $F \cap E_{n+1} \neq \{0\}$

et il existe $X \in F \cap E_{n+1} \setminus \{0\}$

$X \in E_{n+1}$, donc $\exists (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq : $X = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \Omega C_i$

d'où $SX = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \lambda_i \Omega C_i$ (voir avant)

$(\Omega C_i)_i$ étant orthonormale, on a :

$$\begin{aligned}
 {}^tXSX &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \\
 &\geq \lambda_{n+1} {}^tXX
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sup_{X \in F, {}^tXX=1} {}^tXSX \geq \lambda_{n+1}$$

donc on en déduit que : $\inf_{F \in \mathcal{F}_n} \left(\sup_{X \in F, {}^tXX=1} {}^tXSX \right) \geq \lambda_{n+1}$

$$\text{Finalement : } \lambda_{n+1} = \inf_{F \in \mathcal{F}_n} \left(\sup_{X \in F, {}^tXX=1} {}^tXSX \right)$$

EXERCICES SUR LES CONGRUENCES, PGCD, PPCM, NOMBRES PREMIERS (Gordon)

- Exercice 1: Déterminer le triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que:
(i) $\text{ppcm}(a, b) = 42$ (ii) $\text{pgcd}(a, c) = 3$ (iii) $a + b + c = 29$

- Solution: Par (iii), $3|a$ et $3|c$ donc $3|(a+c)$
• On a $a + b + c = 29$, donc $b \equiv 29 - (a+c) \pmod{3}$, donc $b \equiv 29 \pmod{3}$
Comme 3 est premier on a donc: $3 \nmid b$
• on a par (i): $b|42$ et $42 = 3 \times 14$
Comme $3 \nmid b$ alors par le théorème de Gauss: $b|14$
donc $b \in \{1, 2, 7, 14\}$
• Comme $29 - b = a + c$ divisible par 3
alors $b \equiv 29 \pmod{3}$ ou $b \equiv 14 \pmod{3}$
- si $b = 2$: $a = 21$ ou $a = 42$ par (i)
Comme $a \leq 9$ par (iii), alors $a = 21$
et $c = 29 - a - b = 29 - 21 - 2 = 6$
- si $b = 14$: $a \in \{3, 6, 21, 42\}$ par (i)
et par (iii): $a \leq 29 - b$
 $\leq 29 - 14$
 ≤ 15
donc $a \in \{3, 6\}$
* si $a = 3$, $c = 29 - b - a$
 $= 29 - 14 - 3$
 $= 12$
* si $a = 6$, $c = 29 - b - a$
 $= 29 - 14 - 6$
 $= 9$
Donc les triplets (a, b, c) sont parmi $(21, 2, 6)$, $(3, 14, 12)$ ou $(6, 14, 9)$
• On vérifie réciproquement que ces triplets sont des solutions.

- Exercice: a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid (2^{3n+5} + 3^{n+1})$
 b) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, 30 \mid (n^5 - n)$
 c) Quel est le reste de la division euclidienne de 16^{1000} par 7?

- Solution: a) On a $2^5 \equiv 2 \pmod{5}$ et $2^{3n} \equiv 8^n \equiv 3^n \pmod{5}$ ↙ Fermat

$$\text{donc } 2^{3n+5} \equiv 2 \cdot 3^n \pmod{5}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } 2^{3n+5} + 3^{n+1} &\equiv 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n \pmod{5} \\ &\equiv 5 \cdot 3^n \pmod{5} \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

b) Par le théorème de Fermat on a: $n^5 \equiv n \pmod{5}$
 et $n \equiv n \pmod{5}$

$$\text{donc } n^5 - n \equiv 0 \pmod{5} \text{ d'où } 5 \mid (n^5 - n)$$

$$\begin{aligned} \text{De même } n^3 &\equiv n \pmod{3}, \text{ d'où } n^5 \equiv n^3 \cdot n^2 \pmod{3} \\ &\equiv n \cdot n^2 \pmod{3} \\ &\equiv n^3 \pmod{3} \\ &\equiv n \pmod{3} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } n^5 - n \equiv 0 \pmod{3} \text{ d'où } 3 \mid (n^5 - n)$$

- On a n et n^5 de même parité, donc: $2 \mid (n^5 - n)$

- Comme 2, 3 et 5 sont deux à deux premiers entre eux,
 alors $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid (n^5 - n)$

$$\text{i.e. } 30 \mid (n^5 - n)$$

c) Soit $N = 16^{1000}$

On cherche la congruence de N modulo 7

$$\text{On a: } 16 \equiv 2 \pmod{7}, \text{ donc } N \equiv 2^{2^{1000}} \pmod{7}$$

$$\text{On va utiliser: } 2^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ (théorème de Fermat)}$$

Pour cela, on cherche le reste de la division de 2^{1000} par 6.

$$\text{Comme } 4^2 \equiv 4 \pmod{6}, \text{ on a aussi } 4^m \equiv 4 \pmod{6} \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et donc } 2^{1000} = 4^{500} \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\text{donc: } \exists q \in \mathbb{N} \text{ tq } 2^{1000} = 6q + 4$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } N &\equiv 2^{69+4} [7] \\ &\equiv (2^6)^9 \cdot 2^4 [7] \\ &\equiv 1 \cdot 2^4 [7] \\ &\equiv 16 [7] \\ &\equiv 2 [7] \end{aligned}$$

donc le reste est cherché est 2.

- Exercice: Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} (dans le système décimal) et B la somme des chiffres de A .
Soit C la somme des chiffres de B .
- Que vaut C ?

- Solution: Si $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_p \cdot 10^p$ (avec $a_i \in \mathbb{K}[0; 9] \forall i$)
on a alors: $N \equiv \sum_{i=0}^p a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^p a_i \pmod{9}$ (car $10^i \equiv 1 [9] \forall i$).

Donc: $C \equiv B \equiv A \equiv 4444^{4444} [9]$

on a: $4444 \equiv 16 [9]$
 $\equiv -2 [9]$

et on en déduit que $4444^3 \equiv (-2)^3 [9]$
 $\equiv -8 [9]$
 $\equiv 1 [9]$

Comme $4444 = 3 \cdot 1481 + 1$
on a: $4444^{4444} = (4444^3)^{1481} \cdot 4444$
 $\equiv 1 \cdot (-2) [-9]$
 $\equiv 7 [9]$

d'où $C \equiv 7 [9]$

Déterminer C :
on a: $4444^{4444} \leq 10^{5000}$
 $\leq (10^4)^{5000}$
 $\leq 10^{20000}$

Donc C a au plus 20000 chiffres

$$\text{donc } A \leq 9 \times 20000 \\ < 180000$$

donc A a au plus 6 chiffres

$$\text{donc } B \leq 9 \times 6 \\ \leq 54$$

$$\text{donc } C \leq 5 + 9$$

$$\text{i.e. } C \leq 14$$

Comme $C \equiv 7[9]$ on en déduit que $C = 7$

ETUDE D'UNE SUITE DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$

(MPSI Méthode & Exercices)

- Exercice : Étudier la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in [\frac{1}{3}, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}} \end{cases}$

- Solution : Soit $f: I = [\frac{1}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \sqrt{x - \frac{2}{9}}$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

• f est dérivable sur I ($x - \frac{2}{9} > 0 \forall x \in I$), et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - \frac{2}{9}}}$$

donc $f'(x) > 0 \forall x \in I$

donc f est strictement croissante sur I .

de plus : $\forall x \in I, f(x) \geq f(\frac{1}{3})$
 $\geq \frac{1}{3} \geq \frac{2}{9}$

donc l'intervalle I est stable par f .

f croissante donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} - \text{si } u_0 \geq u_1 & \text{alors } u_1 \geq u_2 \text{ etc., et donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ - \text{si } u_0 \leq u_1 & \text{alors } u_1 \leq u_2 \text{ etc., et donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \end{pmatrix}$

• On cherche les points fixes de f :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) = x &\Leftrightarrow x = \sqrt{x - \frac{2}{9}} \\ &\Leftrightarrow x^2 = x - \frac{2}{9} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\text{d'où } x_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

donc : $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{2}{3}$

f étant continue sur I : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors sa limite est soit $\frac{1}{3}$ soit $\frac{2}{3}$

- Maintenant, f étant croissante sur I , les intervalles $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}; +\infty[$ sont stables par f

$$\text{si } x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{9}} \leq \sqrt{x - \frac{2}{9}} \leq \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{9}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \leq \sqrt{x - \frac{2}{9}} \leq \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x - \frac{2}{9}} \leq \frac{2}{3}$$

on a: $\forall x \in I \quad (f(x) - x)' = \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{2}{9}}} - 1$

donc $(f(x) - x)' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{2}{9}}} = 1$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{x - \frac{2}{9}} = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{2}{9} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$

on a: $f(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = 0$ et $f(\frac{2}{3}) - \frac{2}{3} = 0$

d'où le tableau de variation de f :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$(f(x) - x)'$	+	0	-	
$f(x) - x$	0	+	0	-

- Si $u_0 = \frac{1}{3}$, alors $u_1 = u_2 = \dots = u_n = \frac{1}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{3}$

- si $\frac{1}{3} < u_0 \leq \frac{2}{3}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$
sa limite l vérifie $\frac{1}{3} < l \leq \frac{2}{3}$ et $l \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$
donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{3}$

- si $u_0 \geq \frac{2}{3}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{2}{3}$
sa limite l vérifie $\frac{2}{3} \leq l$ et $l \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$
donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{3}$

Conclusion: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{3}$ si $u_0 = \frac{1}{3}$
ou $\frac{2}{3}$ si $u_0 > \frac{1}{3}$